1093. 汎函数列ノ擴張ニツイテ

中村 正弘
角谷 静夫 (阪大)

初メハツマラナイ問題ダッタノデス。

Pettis ノ定理 —— コウ云ッテイヽノカドウカ知リマセンガ ——[1] ヲ証明シヨウトシタノガ事ノ始マリダッタノデス。洲之内—中村ノ証明[2]ガ長ヘギルト思ッタノデ、著者ノ一人(中村)ガコレヲ Gelfand ノ compactness criterion ヲ用ヒテミヨウトイフ氣ニナッタノデス。ソレハ Boolean algebra $B_\alpha = \{e_\alpha\}$ ニ完全加法測度ガ定義サレテヰタトキ、$|e| \to 0$ ニ対シテ $x(e) \to 0$ (弱) ガ判ッテヰルノデスカラ $S = \{x(e) \mid e \in B\}$ ガ B—空間中デ compact トイフコトヲ云ヘバ充分ダト云フコトハ判リ切ッタ話デスカラ-----

トコロデ Gelfand ノ定理[3] ハコウ書イテアッタノデス。

B空間 E ノ部分集合 S ガ compact デアルタメノ必要充分條件ハ任意ノ 0 ニ弱收斂スル汎函数列(勿論線型デス、以下同様) $\{f_n\}$ ニ対シテ $\{f_n(x) \mid x \in S\}$ ガ S 上デ一様收斂スルコトデアル。

ソコデ出来タト思ッタノデス。Vitali-Hahn-Saks ノ定理[4] ニヨレバ $f_n x(e)$ ハ実数値ノ函数トシテ一様收斂

数ナノデスカラ，トコロガソレハ問屋デ下シテクレズ，Gelfand ノ定理ニハ空間 E ノ可分性ガ落チテオタノデス。[5]

コヽニ至ッテ問題ガ変ッテシマッタノデス。$X(e)$ ノ値域ガ可分トハ限リマセンカラ Gelfand-Phillips ノ定理デソノマヽハ使ヘナイワケデス。ソコデ $|e_n|\to 0$ ヲ取リ出シテ，$\{X(e_n)\}$ デ張ラレル可分部分空間 E' ニ對シテ定理ヲ用ヒヨウトイフコトニナッタノデス。ソコデ $\{f'_n\}$ ヲ E'^* —— E' ノ共軛空間 —— カラ $f'_n\to 0$ (弱) トイフ條件付デ取リ出シタトキ f'_n ノ各々ガ E ニ拡張サレテ f_n トナリ，$f_n\to 0$ (弱) ガ成立ッテラバ，Vitali-Hahn-Saks デ $\{f_n X(e_m)\}$ ガ $\{e_m\}$ 上デ一様収斂シテ $\{X(e_m)\}$ ガ compact ガ云ヘルダラウトイフ想像ダッタノデス。

コウシテ問題ガ —— 単純ナ一補題ノ形デ呈出サレタノデス。

B 空間 E ノ部分空間 E' 上デ定義サレタ 0 ニ弱収斂スル汎函数 $\{f'_n\}$ ハ，E ニ同ジ性質ヲ保存シタマヽ拡張出来ルカ？

最初コレハ何ノ困難モナイ問題ダト思ヒ，ツケナシ証明シテシマヒマシタガ，著者ノ一人カラ誤ッテオルコトガ示サレテシマヒマシタ。数物ノトキ中村ガシャベッタトキコノ状態デシタ。

ソノ後コノ問題ハ否定的ニ解カレマシタ．コノ談話ハソノ証明デス。

× × ×

カナリ長イ前置ガ始マリマス．(m) ト (c_0) ヲ各々有界数列，0ヲ極限ニモツ収斂数列ノ作ル B 空間デ，ノルムヲ $\|x\| = \sup_i |x_i|$ デ定義シマス．解答ハ (c) 上デ弱収斂スル汎函数列デ，ソノ拡張ガ (m) 上デハ収斂シナイモノガ存在スルト云フコトヲ示スコトニヨッテ與ヘラレノデス．ソノタメニシバラク (m) ノ共軛空間 $(m)^*$ ニツイテ，ソノ表現ヲ論ジナケレバナリマセン。

Čech ノ compactification ヲ使ッテ[6)]，discrete ナ topology ヲツケタ自然数全体 N ヲ compactly ニ，embed シタ空間ヲ Ω，$\Omega - N$ ヲ Ω' トシマス。今 (m) ヲ N ノ上ノ連續函数ト考ヘレバ，Čech ノ定理デ (m) ノ元 $x = \{x_n\}$ ハ唯一通リニ Ω ノ連續函数 $x(\omega)$ ニ拡張サレルワケデス。逆ニ Ω ノ連続函数ハ N 上デ (m) ノ元ヲ指定シマスカラ Ω ノ連続函数全体 $C(\Omega)$ ト (m) トハ一致シマス。面倒デスカラ以下 $C(\Omega)$ ト書カズニ (m) デ Ω ノ連続函数ヲ示シマス。

所デ Ω ハ compact space デスカラ Markhoff ノ定理[7)] ニヨッテ (m) ノ共軛空間 $(m)^*$ ノ任意ノ元 f ハアル完全加法測度 μ ニヨッテ

$$f(x)=\int_{\Omega}\chi(\omega)\,d\mu$$

ト表サレ $\|f\|=\int(d\mu)$ ガ成立チマス。[10]

Banach ノ generalized limit ハ (m) ノ汎函数デスカラ[8] 今コノ積分ノ値ヲ $\mathrm{Lim}\, x_n \ (X=\{x_n\})$ デ表ハセバ,

1°. $\mathrm{Lim}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\,\mathrm{Lim}\, x_n+\beta\,\mathrm{Lim}\, y_n$

ガ成立チマス。今更ニ

2°. $x_n\geqq 0 \longrightarrow \mathrm{Lim}\, x_n\geqq 0$

トイフ條件ハ

2'. μ ガ positive デアル。

トイフコトト同等デアリ,

3°. $\mathrm{Lim}\ 1=1$

ハ 3'. μ ガ normalize サレテヰル.

トイフコトト同等デス. 更ニ

4°. $\mathrm{Lim}\, x_n=\mathrm{Lim}\, x_{n+1}$

ハ, 4'. μ ハ N 上デ 0 デアル, 又ハ μ ノマスハ Ω_0 上ニ分布シテヰル。

トイフコトデス. 更ニ條件ヲカロヘテ

5°. $\mathrm{Lim}\, x_n y_n=(\mathrm{Lim}\, x_n)(\mathrm{Lim}\, y_n)$

ヲ入レレバ, Gelfand ノ normed ring ノ理論カラ

5'. μ ノマスハ Ω ノ一点ニ集ッテヰル。

コトガ結論サレマス。

コノヤウニ Banach limit ハ Čech ノ compactification ト密接ナ関係ヲ持ツモノデスガ，特ニ積分ヲ Ω' ト N ノ上ニ分ケテヤレバ

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n + \int_{\Omega'} X(\omega)\, d\mu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$$

又ハ

$$(1') \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n + \lambda \operatorname{Lim} x_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$$

ノ形デ表サレマス．コノ後者ノ表現ハ Cohen-Dunford[9)] ニヨッテ得ラレタモノデスガ，Čech ノ compactification デモ上ノ様ニシテ求メル事ガ出来ルワケデス。

× × ×

マダ前置ガ続キマス．モウ少シ Ω ノ性質ヲ調ベテ置キタイノデス．マヅ Ω ハ totaly-disconnected デアルコトハ明ラカデス。我々ハ N ハ充分ニ知ッテ居マスカラ Ω' ノ構造ヲ少シバカリ知リタイノデス。

今 S ヲ N ノ部分集合デ有限デナイトシマス。ソコデ

$$n \in S \rightarrow x_n = 1, \quad n \notin S \rightarrow x_n = 0$$

デ定義サレル(m)ノ元XヲΩニ拡張スレバΩ_0ノ上デ0又ハ1ヲ取ル函数$X(\omega)$ $\underset{\omega\in\Omega_0}{\text{——}}$ ヲシテ連続 —— ニスルコトが出来マス。ソコデ$\{\omega \mid X(\omega)=1\}=S'$トスレバ，$X(\omega)$ノ連続性カラ$S'$ハ$\Omega'$ノ開且閉部分集合ニナリマス。即チ$N$ノ中ノ$S$ニ對シテ1-operationデ$\Omega'$ノ開且閉部分集合$S'$が意志的ニ指定サレマス。

逆ニ，今Ω'上ニ開且閉集合S'ヲ與ヘレバ$X'(\omega)$ヲ

$$\omega\in S' \to X'(\omega)=1, \quad \omega\in S' \to X'(\omega)=0$$

デ定メテ全空間ニ拡張スレバ

$$0 \leqq y(\omega) \leqq 1$$

トイフΩノ連續函數$X(\omega)$が得ラレマス。今$y(\omega)$ノ中$0<\lambda<1$ニ分布シテ井ル値ヲ

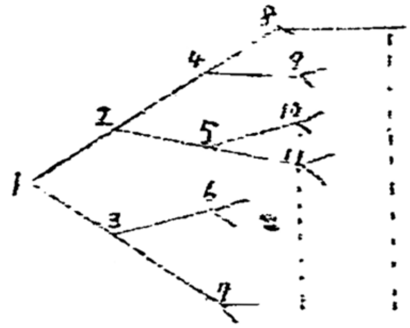
$$y(\omega) \geqq 1/2 \to X(\omega)=1, \quad y(\omega) < 1/2 \to X(\omega)=0$$

ト直シテ$X(\omega)$ヲ定メ$S=\{\omega \mid X(\omega)=1\}\cap N$デ定義スレバ，$S$ハ有限デハナイ$N$ノ部分列トナリマス。[11] コウシテ$S'$カラ指定サレル$S$ハ高々有限箇ノ差ヲ除イテ一致スルワケデス。

言ヒカヘレバ，Ω'ノ総テノ開且閉部分集合Nノスベテノ部分列，Nノ総ベテノ有限集合等ノ作ルBoole代數ヲソレゾレ$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{L}$トスレバ，[12] $\mathfrak{A}$ハ$\mathfrak{B}/\mathfrak{L}$ニ同型デアル。

我々ハコノ結論ヲ使ッテ，Ω'ノ中ニ開且閉デ互ニ素ナ部分集合が$2^{\aleph_0}$ヶ以上アルコトヲ示シタイノデス。コノ事

ハ上ノ結果ヲ使ヘバ,《Nノ部分列ノアル族ノ中デ,有限箇以外ハ互ニ素デソノ列ノ数ガ$2^{\aleph_0}$以上存在スルモノガアルカ?》ト云フコトデス. コレハ,自然数ヲ



ト並ベテ,(1, 2, 4, 8, -----)トイフヤウナ枝ヲ列トスル様ナ族ヲ考ヘレバヨイワケデス. コレ等ハ互ニ有限箇ダケシカ共有シマセンカラ.

* * *

コレダケノ前置キヲオイテ問題ノ問題ニ取リカヽリマス. マヅ $E=(m)$, $E'=(c_0)$ トスレバ E' ハ E ノ中ノ閉線型部分空間デス. 今

$$f'_n(x)=x_n$$

トスレバ, f'_n ハ (c_0) ノ上デ0ニ弱収斂シテヰマス。ソコデ今 f'_n ヲ何等カノ方法デ (m) ニ拡張シタトシマスト, 前ノ(1)ヲ用ヒレバ

$$(2) \qquad f_n(x)=x_n+\int_{\Omega'} x(\omega)\,d\mu_n$$

ヲ得マス。各々ノ μ_n ハ完全加法的ナ Ω' ノ上ノ測度デスカラ, 互ニ素ナ開且閉部分集合ノ中高々 $\aleph_0$ ケ以下デ0デナイ測度ヲ持ツワケデス。云ヒカヘレバ Ω' ノ中ニハ開且閉デ μ_n $(n=1,2,-----)$ ニ関スル測度ガスベテ0ニナルヤウナ部分集合ガ少クトモ一ツ存在スルワケデス。ソコ

デソレヲ S' トシテ, $x(\omega)$ ヲ S' ノ上デ1, $\Omega'-S'$ デ $x(\omega)=0$ トナルヤウナ連続函数トスレバ, (2) ノ後ノ項ノ積分ハイツモ0デスカラ, コノ $x=x(\omega)$ ニ對シテハ (2) ハ

(3) $$f_n(x)=x_n$$

デス。所が空デナイ S' 上デ1ヲ取ルノデスカラ, $f_n(x)$ ハ決シテ収斂シマセン。

即チ, (C_0) ノ汎函数列ヲ (m) ニドウ擴張シテミテモ, 0ニ弱収斂サセルコトハ不可能デス。コレデ問題ノ否定的解答が與ヘラレタワケデス. 然シ未ダ問題ハ完全ニ終ッテシマッタワケデハナク、デハ《ドウイフ條件ノ下デコノ定理が成立ツカ？》トイフコトニツイテハ全ク判ッテオマセン。大体ノトコロ, EカラE'ヘノ有界ナ射影作用素ノ存在スルトキデハナイカト云フノが豫想ナノデスが。

---

1) 國澤, 談話 (193); Kunisawa, Proc. Imp. Acad., 16 (1940) 68—72.
定理ノ内容ハ $x(e)$ が完全加法測度ヲモツ Boole 代数上デ定義サレタ抽象値完全加法函数が弱絶対連続デアレバ強絶対連続デアル。

2) Nakamura-Sunouchi, Proc. Imp. Acad., 18 (1942) —. コノ中§3ノ証明ハ不必要ダッタコトが判リマシタ。後ノ談話デ述ベマス。

3) Gelfand, Sbornik 6 (1938), p. 268, Teil II §2.

4) 國沢氏ノ前出論文参照.

5) Phillips, Trans. A.M.S., 48(1940), 516—541. 定理3.11系。

6) 角谷, 位相数学2−2(1940) p.17 ff 参照……定理ヲ書ケバ, 完全正則空間Sニ對シテ compact 空間β(S)ガ存在シテ (i) $S \subset \beta(S)$, (ii) Sハβ(S)デ稠密, (iii) Sノ有界連続函数ハ一意的ニβ(S)ノ連続函数ニ拡張サレル。

7) A. Markhoff, Mat. Sbornik, (193) —

8) Banach ノ本人ハ角谷, 数学會誌(　)p. 参照.

9) Cohen-Dunford, Duke Math. Journ., (1939)

10) $L(m)^*$ ノ元ヲ積分表示スルコトハ Hildebrandt ガヤッテイマスガ, Hildebrandt ハμガ有限加法的ダト述ベテイマス。Čech ト Markhoff ヲ使ッテμガ完全加法的ダトイフコトガ始メテ判ルワケデス。コノ事ハ後デ重要ナ役割ヲ演ジマス。

11) $\chi(\omega)$ ノ値ハ0ト1以外ニ集積点ヲ持チマセン。從ッテ何ニ1/2デナクテモカマハナイワケデス。ソノ差ハ有限ヶデス。

12) C ガ K ノ ideal デアルコトハ明カデス。